



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Societatea de Științe Matematice din România,

Filiala Caraș - Severin



ONM, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 07.02.2026

Clasa a XI-a

○Timp de lucru: 180 de minute. ○ Din oficiu se acordă 10 puncte.

**Problema 1. (22 de puncte)**

Se consideră mulțimea  $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = 3 \cdot I_2 - X\}$ .

(a) Arătați că mulțimea  $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = 3 \cdot I_2 - X\}$  conține cel puțin două elemente.

(b) Demonstrați că, dacă  $X \in \mathcal{A}$ , atunci matricea  $X - I_2$  este inversabilă, cu inversa  $X + 2 \cdot I_2$ .

**Problema 2. (22 de puncte)**

Într-un reper cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A_n(n, n^3)$ , cu  $n \in \mathbb{N}$  și punctul  $B(0,1)$ .

(a) Arătați că nu există niciun triplet  $(i, j, k)$  cu  $1 \leq i < j < k \leq n$  pentru care punctele  $A_i, A_j, A_k$  sunt coliniare.

(b) Determinați numerele naturale  $n$  pentru care aria triunghiului  $A_2 A_n B$  este egală cu  $\frac{31}{2}$ .

**Problema 3. (23 de puncte)**

Calculați următoarele limite de șiruri:

$$L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+3}, L_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3n+2} \cdot (\sqrt[n]{4} - 1) \text{ și } L_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n}}.$$

**Problema 4 (23 de puncte)**

(a) Studiați convergența șirului  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \forall n \geq 1$ .

(b) Arătați că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 \in (0,1)$   $x_{n+1} = \sqrt{x_n - x_n^2}, \forall n \geq 1$  este convergent și determinați limita sa.

(Supliment GM 9 și 11/2025)

Subiecte selectate de prof. Nicolae Stăniloiu